Analyse de systemes MIN-MAX

Geert Jan Olsder

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

2004 route des Lucioles
B.P. 93
06902 Sophia-Antipolis
France

Rapports de Recherche

N°1904

Programme 5

Traitement du signal, Automatique et Productique

ANALYSE DE SYSTEMES MIN-MAX

Geert Jan OLSDER

Mai 1993

ANALYSIS OF MIN-MAX SYSTEMS

Geert Jan Olsder*

INRIA Sophia Antipolis
2004 Route des Lucioles
06565 Valbonne Cedex
France

6 mai 1993

Abstract

We will study extensions of known results of max-plus (or min-plus) systems to systems where the underlying algebra consists of the three operations max, min and addition simultaneously (such systems are called min-max systems). Such systems are nonlinear in both the max-plus and the min-plus algebra. The notion of a 'pulsative' circuit is introduced, which characterizes the speed of a stationary solution of the system. In general, the cycle mean of a pulsative circuit is neither maximal (as is the case for max-plus systems) nor minimal (as is the case for min-plus systems). Subject to certain conditions, the solutions of min-max systems show a periodic behaviour, which is directly related to the pulsative circuit(s). Solutions starting from arbitrary initial conditions converge in a finite number of steps to such a periodic behaviour. Game-theoretic notions are helpful for the construction of impulsative circuits. Both analytic and graph-theoretic reasoning is used in the derivation of the various results.

Résumé

Nous étudions des extensions de résultats connus sur les systèmes dans l'algèbre max-plus (ou min-plus) à des systèmes dans l'algèbre min-max (ces systèmes sont basés sur l'algèbre où on a les trois opérations max, min et addition). Les systèmes min-max sont non linéaires dans l'algèbre max-plus et dans l'algèbre min-plus. On introduit le concept du 'circuit pulsatif', qui caractérise la vitesse d'une solution stationnaire du système. En général, le poids moyen d'un circuit pulsatif n'est ni maximal (comme pour les systèmes max-plus) ni minimal (comme pour les systèmes min-plus). Sous certaines conditions, les solutions des systèmes min-max montrent un comportement périodique, qui est lié aux circuits pulsatifs. Des solutions issues de conditions initiales arbitraires convergent en un nombre fini d'étapes vers un tel comportement. On peut utiliser des concepts de la théorie des jeux pour construire les circuits pulsatifs. On utilise des raisonnements analytiques et de la théorie des graphes pour la dérivation des résultats divers.

Mots clés

Systèmes à événements discrets, systèmes min-max, circuit critique, max-plus algèbre, comportement périodique.

Keywords

Discrete event systems, min-max systems, critical circuit, max-plus algebra, periodic behaviour.

*Adresse permanente: Dept. of Mathematics, Delft University of Technology, P.O. Box 5031, 2600AG Delft, the Netherlands

1 Introduction et Point de Départ

Dans ce travail nous étudierons le système

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes y(k) \ , \tag{1}$$

$$y(k+1) = C \odot x(k) \wedge D \odot y(k) \ . \tag{2}$$

On appelle la combinaison des vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ et $y = (y_1 \ldots, y_m)'$, où $'$ est la transposée, l'état du système. Les quantités A, B, C et D sont des matrices d'ordre $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ et $m \times m$ respectivement. On écrit $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $C = \{c_{ij}\}$ et $D = \{d_{ij}\}$. Nous supposons d'une part que les coordonnées de x et les coefficients de A et B sont des éléments de $R \cup \varepsilon$ et d'autre part que les coordonnées de y et les coefficients de C et D sont des éléments de $R \cup \top$. Les symboles ε et $\top$ dénotent $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. L'opérateur $\otimes$ est la multiplication dans l'algèbre max-plus; $\oplus$ est l'addition dans la même algèbre; les opérateurs $\odot$ et $\wedge$ sont respectivement la multiplication et l'addition dans l'algèbre min-plus. On fait la convention $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon$ et $\top \odot \varepsilon = \top$. La notation conventionnelle de (1) et (2) est:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \max(a_{i1} + x_1(k), \ldots, a_{in} + x_n(k), \\ &\quad b_{i1} + y_1(k), \ldots, b_{im} + y_m(k)), \ \ i = 1, \ldots, n, \\ y_i(k+1) &= \min(c_{i1} + x_1(k), \ldots, c_{in} + x_n(k), \\ &\quad d_{i1} + y_1(k), \ldots, d_{im} + y_m(k)), \ \ i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Si on suppose qu'une condition initiale $(x(0), y(0))$ est donnée, on peut calculer l'évolution des équations (1) et (2) de façon unique, c'est à dire qu'on peut calculer $(x(k), y(k))$ pour $k = 1, 2, \ldots$.

Avant de formuler les problèmes qui nous intéressent, commençons par énoncer quelques résultats connus. Le système (1), (2) est constitué de deux sous-systèmes indépendants

$$x(k+1) = A \otimes x(k), \ \ y(k+1) = D \odot y(k), \tag{3}$$

qui sont interconnectés par les matrices B et C. Les propriétés suivantes des sous-systèmes (3) sont bien connues. (La plupart des définitions et des théorèmes sont donnés pour le système $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dans l'algèbre max-plus; il existe aussi des définitions et des théorèmes analogues pour les systèmes $y(k+1) = D \odot y(k)$ dans l'algèbre min-plus.)

Définition .1 *Le graphe de communication $\mathcal{G}(A)$ d'une matrice carrée A est un graphe orienté comportant* *un nœud pour chaque entrée de la matrice A. Ce graphe comporte un arc entre j et i ssi $a_{ij} \neq \varepsilon$. La valuation de cet arc est a_{ij}.*

Définition .2 *Pour chaque chemin $\zeta = \{t_1, t_2, \ldots, t_{j+1}\}$ dans $\mathcal{G}(A)$, où t_i et t_{i+1} sont deux nœuds reliés par un arc (on parle d'un circuit si $t_{j+1} = t_1$ et d'un circuit élémentaire si en outre $t_{i_1} \neq t_{i_2}$, $i_1 \neq i_2$ et $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, j\}$), on définit son poids moyen par $|\zeta|_{\mathrm{w}}/|\zeta|_{\mathrm{l}}$ (la division est celle de l'algèbre conventionnelle), où $|\zeta|_{\mathrm{w}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_{t_2 t_1} \otimes \cdots \otimes a_{t_{j+1} t_j}$ est le poids de ζ et $|\zeta|_{\mathrm{l}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} j$ est sa longueur. Pour tout ensemble de chemins entre deux nœuds le(s) chemin(s) avec le poids moyen maximal est (sont) appelé(s) critique(s). Le(s) circuit(s) avec le poids moyen maximal (dans l'ensemble de tous les circuits) est (sont) appelé(s) pulsatif(s).*

Théorème .3 *Si la matrice A est irréductible (de façon équivalente: $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe), il existe une valeur propre (notée $\lambda_{\max}$) qui est unique et un vecteur propre $v \neq \varepsilon$ (non nécessairement unique) tels que $A \otimes v = \lambda_{\max} \otimes v$. La valeur propre est égale au poids moyen maximal de tous les circuits élémentaires, c.à.d. $\lambda_{\max} = \max_\zeta |\zeta|_{\mathrm{w}}/|\zeta|_{\mathrm{l}}$, où ζ décrit l'ensemble des circuits élémentaires de $\mathcal{G}(A)$.*

La valeur propre correspondante à D (dans l'algèbre min-plus) est notée $\lambda_{\min}$.

Théorème .4 *Pour toute matrice carrée A de valeur propre $\lambda_{\max}$, il existe des entiers d et M tels que $\forall m \geq M$ on ait $A^{m+d} = \lambda_{\max}^d \otimes A^m$. Le plus petit d vérifiant la propriété précédente est égal à la cyclicité du graphe critique de A (voir [2]).*

Dans le cas où il existe un et seulement un circuit ζ de $\mathcal{G}(A)$ dont le poids moyen est égal au poids moyen maximal, la cyclicité mentionnée est égale à $|\zeta|_{\mathrm{l}}$. Pour calculer la valeur propre et un vecteur propre, plusieurs algorithmes existent, et nous en donnons un.

Algorithme .5 *Calcul de la valeur propre et d'un vecteur propre.*

1. *Prendre un vecteur arbitraire $x \neq \varepsilon$.*

2. *Multiplier à gauche ce vecteur par A (plusieurs fois) jusqu'à $A^{l+d} \otimes x = c \otimes A^l \otimes x$. De telles constantes l, d et c existent à cause du Théorème .4.*

3. *$\lambda_{\max} \stackrel{\mathrm{def}}{=} c/d$.*

4. *$v \stackrel{\mathrm{def}}{=} ((A^l \otimes x) \otimes (A^{l+1} \otimes x) \otimes \cdots \otimes (A^{l+d-1} \otimes x))^{1/d}$. Dans l'algèbre conventionnelle on a $v = (x(l) + x(l+1) + \cdots + x(l+d-1))/d$, où $x(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A^k \otimes x$.*

5. *Definir* $\bar{v}_j = v_j$ *(la j-ième coordonnée de v) si* $(A \otimes v)_j = \lambda_{\max} \otimes v_j$ *et* $\bar{v}_j = \varepsilon$ *si* $(A \otimes v)_j \neq \lambda_{\max} \otimes v_j$.

6. *Multiplier le vecteur* $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)'$ *par A jusqu'à* $A^p \otimes \bar{v} = \lambda_{\max} \otimes A^{p-1} \otimes v$. *Cette égalité est vérifiée pour un p fini. Le vecteur* $\bar{v}$ *est un vecteur propre.*

Maintenant nous considérons de nouveau le système (1), (2) que nous écrivons de façon plus compacte: $(x(k+1), y(k+1)) = \mathcal{M}((x(k), y(k)))$.

Définition .6 *Un scalaire* λ, $\varepsilon \leq \lambda \leq \top$, *est appelé valeur propre de l'application* $\mathcal{M}$, *si il existe un vecteur* (x, y), *où x ou y a au moins une coordonnée finie (c.à.d.* $\in R$*), tel que*

$$(\lambda \otimes x, \lambda \odot y) = \mathcal{M}((x, y)). \tag{4}$$

Le vecteur (x, y) *s'appelle vecteur propre de* $\mathcal{M}$.

Pour définir un 'circuit pulsatif' on a besoin d'un sous-graphe de $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ avec $n+m$ nœuds construit de la façon suivante. Considérez la i-ième équation scalaire de (4), c.à.d. $(\lambda \otimes x, \lambda \odot y)_i = (\mathcal{M}((x,y)))_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+m$. Parmi les $n+m$ termes individuels dans le deuxième membre de cette expression (qui ont une des formes $a_{ik} + x_k$ ou $b_{ik} + y_k$ si $i \leq n$ et $c_{i-n,k} + x_k$ ou $d_{i-n,k} + y_k$ si $i > n$) il y en a au moins un qui conduit à une l'égalité. Soient $i_1, \ldots, i_{l_i}$ de tels termes, on relie chaque nœud $i_1, \ldots, i_{l_i}$ au nœud i par un arc orienté. On crée ces arcs pour $i = 1, 2, \ldots, n+m$. Le graphe construit de cette façon est appelé *graphe de saturation* (associé à la valeur propre). Tous les circuits de ce graphe (la preuve qu'il y a des circuits est facile et est laissée au lecteur) sont appelés pulsatif. De manière équivalente, on obtient:

Définition .7 *Les circuits dans* $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ *qui déterminent la 'vitesse' de* $\mathcal{M}$, *c.à.d.* $1/\lambda$, *sont appelés pulsatifs.*

Théorème .8 *Supposons que A et D soient irréductibles et* $B \neq \varepsilon$, $C \neq \top$. *L'application* $\mathcal{M}$ *a une valeur propre unique* λ *et un vecteur propre, correspondant à cette valeur propre, de coordonnées finies ssi* $\lambda_{\max} \leq \lambda_{\min}$. *Alors on a* $\lambda_{\max} \leq \lambda \leq \lambda_{\min}$.

Hormis le Théorème .8, peu de propriétés de (1), (2) sont réellement connues. Dans ce travail nous considérons les points suivants.

- D'après le Théorème .8 le système (1), (2) a un comportement périodique (en supposant que les conditions soient vérifiées). Il existe une relation avec des circuits critiques. Comment définir de tels circuits?

- Dans l'algèbre max-plus, la moyenne arithmétique d'une suite finie de termes $x(k)$ donne un vecteur propre (voir l'algorithme .5). Est-ce qu'une propriété similaire existe pour des systèmes min-max?

- Supposons qu'un comportement périodique existe, est-ce que la solution de (1), (2), issue de $(x(0), y(0))$, converge en un nombre fini d'étapes vers un tel comportement?

Un peu (très peu) d'histoire. Cuninghame-Green a commencé l'exploration exacte des systèmes dynamiques dont l'évolution est déterminée seulement par des contraintes maximales. Il a fait l'observation que de tels systèmes dynamiques peuvent être interprétés comme des systèmes d'équations linéaires dans l'algèbre max-plus [5]. Les résultats exposés dans cette partie, excepté l'algorithme .5, sont extraits de [2]. L'algorithme .5 a été écrit dans [4]. Gunawardena [6] a étudié quelques questions auxquelles nous nous intéressons ici. Des systèmes constitués par une combinaison de sous-systèmes dynamiques, comme (1), (2), et de sous-systèmes algébriques (également dans le contexte de l'algèbre min-max) ont été étudiés dans [7].

2 Pourquoi des Systèmes Min-Max?

Des applications des systèmes qui peuvent être écrites comme (1), (2), sont citées en [6] et en [2]. On peut décrire l'évolution des réseaux de Pétri temporisés par des équations qui contiennent les opérateurs max et min, voir [1].

Ici nous donnons une nouvelle application d'un réseau de Pétri. Il s'agit d'un graphe d'événement temporisé et stochastique, où les jetons peuvent se doubler les uns les autres. Cela est dû au fait que l'on n'applique plus le principe FIFO (First In First Out). Vu d'une manière stricte, l'application n'est pas dans la ligne du courant dominant de cet article parce qu'il y a des éléments de la matrice A qui dépendent de k.

Le graphe d'événement est donné dans la Figure 1. Il est temporisé parce qu'il y a des temps de séjour associés aux places. Nous supposons que les temps de tir associés aux transitions sont nuls. Si on avait le principe FIFO les équations qui décrivent le comportement temporisé du graphe d'événement seraient (au début de l'évolution il y a un jeton dans chaque place)

$$x_1(k+1) = a_{11} \otimes x_1(k) \oplus a_{12} \otimes x_2(k), \tag{5}$$

$$x_2(k+1) = a_{21} \otimes x_1(k) \oplus a_{22} \otimes x_2(k), \tag{6}$$

où a_{ij} dénote le temps de séjour associé à la place qui relie la transition j avec la transition i. Nous supposons